

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ**

до проведення комп'ютерних лабораторних робіт  
із навчальної дисципліни

**«ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА», «ФІЗИКА»**

**РОЗДІЛ**

**«ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ»**

*(для студентів I курсу денної і заочної форм навчання  
освітнього рівня «бакалавр» за всіма спеціальностями)*

**Харків**  
**ХНУМГ ім. О. М. Бекетова**  
**2020**

Методичні рекомендації до проведення комп'ютерних лабораторних робіт із навчальної дисципліни «Загальна фізика», «Фізика» розділ «Електрика і магнетизм» (для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання за всіма спеціальностями) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : О. М. Петченко, А. В. Безуглий. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 43 с.

Укладачі: д-р. фіз.-мат. наук проф. О. М. Петченко,  
канд. фіз.-мат. наук, доц. А. В. Безуглий

#### **Рецензент**

**Є. І. Назаренко**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

*Рекомендовано кафедрою фізики, протокол № 10 від 14 травня 2018 р.*

## ЗМІСТ

Вступ.....	4
1 Лабораторна робота № 1 Вивчення графічного зображення електричного поля точкового заряду та системи точкових зарядів.....	5
2 Лабораторна робота № 2 Вивчення електричного поля плоского та циліндричного конденсатора.....	9
3 Лабораторна робота № 3 Вимірювання електричного опору провідників за методом моста Уїтстона.....	14
4 Лабораторна робота № 4 Осцилографування фізичних процесів.....	18
5 Лабораторна робота № 5 Вивчення магнітного поля кругового витка та соленоїда.....	24
6 Лабораторна робота № 6 Визначення відношення заряду електрона до його маси методом фокусування пучка електронів поздовжнім магнітним полем.....	28
7 Лабораторна робота № 7 Визначення відношення заряду електрона до його маси методом магнетрона.....	33
Список використаної та рекомендованої літератури.....	38
Додаток А.....	39
Додаток Б.....	42

## Вступ

Фізика – наука експериментальна, а тому на першому плані при її вивченні завжди стояв фізичний практикум.

В даній роботі пропонується віртуальний комп'ютерний практикум, який включає віртуальні лабораторні роботи з розділу фізики «Електрика і магнетизм» і дозволяє після його виконання отримати тверді знання з основних електромагнітних явищ.

Методичні рекомендації до кожної роботи містять: основні теоретичні відомості про явища, які вивчаються, основні фізичні закони, які їх описують; опис алгоритму комп'ютерної програми та її можливостей; рекомендації до виконання роботи; рекомендації щодо змісту звіту; питання та завдання для самоконтролю.

Комп'ютерні програми дозволяють отримувати результати в широких межах зміни параметрів (фізичних величин) і дають можливість студентам з творчим мисленням для більш широкого вивчення явищ, виходячи за межі завдання. Алгоритми програм не потребують підготовки з вищої математики.

Всі комп'ютерні програми, які використовуються в практикумі виконані в середовищах Delphi та C++ Builder.

Комп'ютерний практикум створює віртуальну фізичну лабораторію, яка дозволяє замінити виконання лабораторних робіт в реальній лабораторії, яка вимагає дорогого обладнання, виконанням їх аналогів в комп'ютерному класі і може бути використаний в усіх формах навчання включаючи дистанційну.

# 1 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1 ВИВЧЕННЯ ГРАФІЧНОГО ЗОБРАЖЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ ТОЧКОВОГО ЗАРЯДУ ТА СИСТЕМИ ТОЧКОВИХ ЗАРЯДІВ

## 1.1 Мета роботи

Познайомитись із графічним зображенням електричного поля за допомогою електричних силових ліній поля.

## 1.2 Рекомендації до організації самостійної роботи

Важливим поняттям електростатики є поняття точкового заряду. Точковими зарядами називають заряджені тіла, розміри яких малі порівняно з відстанню між ними. Кожен заряд створює електричне поле у навколишньому просторі. Важливою характеристикою електричного поля є вектор напруженості поля  $\vec{E}$ . Поле будь-якого електричного заряду або системи зарядів можна описати графічним способом за допомогою ліній напруженості, які скорочено називають лініями вектора напруженості поля  $\vec{E}$  або силовими лініями поля. Лінії напруженості проводять таким чином, щоб кількість ліній, що пронизують одиницю поверхні, перпендикулярно до площини поверхні, дорівнювала числовому значенню вектора  $\vec{E}$ . Тоді за картиною ліній напруженості можна судити про напрям та величину вектора  $\vec{E}$  в різних точках простору.

Лінії напруженості поля точкового заряду  $q$  являють собою сукупність радіальних прямих, які виходять із позитивного заряду або входять в негативний заряд.

Для точкового заряду напруженість поля в будь-якій точці у вакуумі визначається формулою:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad (1.1)$$

де  $\epsilon_0$  – електрична стала.

Повне число ліній  $N$ , які перетинають сферичну поверхню довільного радіуса  $r$  називають потоком вектора  $\vec{E}$ . Воно буде дорівнювати добутку густини ліній на величину площі поверхні сфери  $4\pi r^2$ . Густина ліній, згідно з умовою, дорівнює

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (1.2)$$

Таким чином, кількість ліній  $N$  або потік вектора  $\vec{E}$  через замкнену поверхню, яка охоплює заряд, чисельно дорівнює:

$$N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} * 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.3)$$

Це твердження являє собою зміст теореми Гауса.

Отриманий результат означає, що число ліній на будь-якій відстані від заряду буде одним і тим же. Звідси виходить, що силові лінії можуть починатися на заряді і закінчуватися на заряді, або прямувати в нескінченність. Картина силових ліній точкового заряду в площині, яка включає заряд, буде подібною картині ліній для заряду, розподіленого вздовж тонкої нитки з деякою густиною  $\tau$  в площині, перпендикулярній нитці. Для зарядженої нитки у вказаній площині напруженість поля визначають формулою:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{N}{2\pi r}, \quad (1.4)$$

а кількість ліній, які перетинають коло радіуса  $r$ , тоді буде дорівнювати:

$$N = \frac{\tau}{\epsilon_0}. \quad (1.5)$$

Порівнюючи вирази (1.3) та (1.5) бачимо, що немає значення: будемо ми вивчати поле в площині, що створює точковий заряд, або система точкових зарядів, які знаходяться в одній площині, чи поле в площині, перпендикулярній нитці або системі заряджених ниток. Картина силових ліній точкового заряду в площині, в якій розміщується заряд  $q$  буде такою ж як і для заряду, розподіленого вздовж тонкої нитки з лінійною густиною, що чисельно дорівнює заряду  $q$ :  $\tau = q$ . Внаслідок доказаної еквівалентності далі ми будемо вживати термін – точковий заряд.

### 1.3 Опис комп'ютерної програми

Програма викреслює силові лінії електричного поля у двовимірному випадку за алгоритмом:

1. Вибирається точка з координатами  $(x, y)$  і обчислюються компоненти поля  $E_x, E_y$ .

2. Проводиться в цій точці невеликий прямолінійний відрізок  $\Delta S$  у напрямку вектора  $\vec{E}$ .

3. Процедура повторюється з нової точки  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ . Процес продовжується до тих пір, поки силова лінія не йде в нескінченність, або до якого-небудь негативного заряду. Число силових ліній, які починаються біля кожного позитивного заряду пропорційне величині заряду. Величина заряду вибирається в умовних одиницях.

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 1.1.

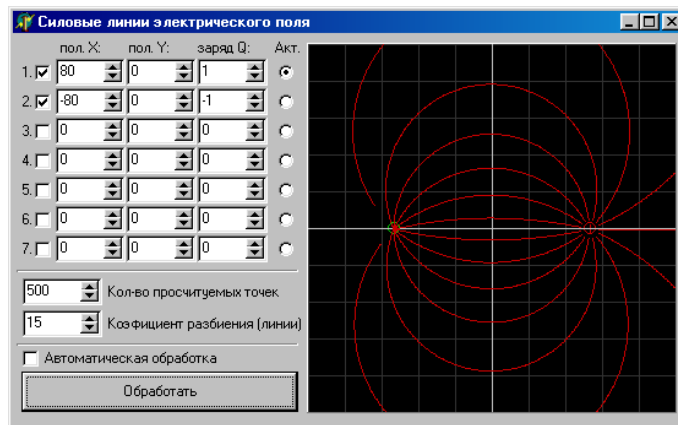


Рисунок 1.1 – Интерфейс програми

## 1.4 Інструкція користувачу

1. Помістіть в точку з координатами  $x = 0$ ,  $y = 0$  точковий заряд  $q$  (величину  $q$  взяти з таблиці 1.1). Виберіть число ліній  $N = 10$ , число кроків (яке визначає довжину силових ліній на екрані) підберіть так, щоб вони охоплювали весь екран. Зарисуйте картину поля (якісно).

2. Збільшіть заряд удвічі. В скільки разів треба збільшити число  $N$ , щоб за графічним зображенням поля можна було визначити величину напруженості?

3. Виберіть на картині поля замкнену лінію довільної форми. Підрахуйте число ліній, які входять в площину, охоплену лінією  $N_1$  (потік, який входить), число ліній, які виходять назовні  $N_2$  (потік, що виходить). Чому дорівнює потік, який перетинає замкнену лінію?

4. Розмістіть два однакових заряди на відстані 2-х клітинок (величину  $q$  взяти з таблиці 1.1). Отримайте для них картину силових ліній, зарисуйте її (якісно).

5. Отримайте картину силових ліній для системи двох однакових зарядів протилежного знаку (якісно, для диполя). Зарисуйте її.

6. Помістіть заряд величиною  $Q = 50 \div 100$  умовних одиниць в точку з координатами  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Внесіть в поле цього заряду невеликий пробний заряд  $q$  (згідно з таблицею 1.1). Змінюючи його положення відносно  $Q$ , зробіть висновок, наскільки сильно він спотворює картину поля. Повторіть операції для негативного заряду  $-q$ .

7. Розмістіть в вершинах квадрата заряди однакової величини за схемою (рис. 1.2) – така система носить назву – квадруполь. Отримайте картину силових ліній та зарисуйте її. Які особливості має картина поля квадруполя?

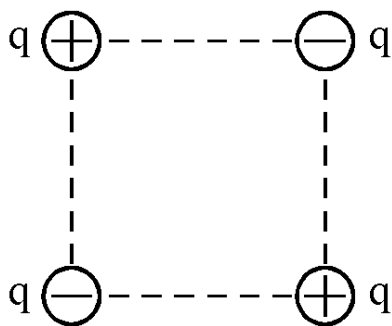


Рисунок 1.2 – Квадруполь

Таблиця 1.1 – Параметри завдань

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q	1	2	1	2	3	4	2	3	4	1	5	5
N	8	8	10	10	6	6	6	8	4	12	6	8

### 1.5 Зміст звіту та рекомендації до обробки і аналізу результатів

Зміст повинен містити мету роботи, якісні зарисовки картин поля, утворених одним, двома точковими зарядами, диполем, квадруполем(п. п. 1, 4, 5, 7), висновки за п. п. 3, 6, 7.

### Контрольні запитання

1. Дайте визначення силовій лінії поля.
2. Що характерно для силових ліній електростатичного поля?
3. Нарисуйте лінії електричного поля для точкового позитивного, негативного заряду.
4. Запишіть формулу, яка визначає напруженість точкового заряду (1.1).
5. Як пов'язаний потік вектора  $\vec{E}$  з повним числом силових ліній, що виходять із заряду (або входять в заряд)? (1.3)
6. Сформулюйте теорему Гауса.
7. Що таке диполь?
8. Яку систему зарядів називають квадруполем? (рис. 1.2).



## 2 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2 ВИВЧЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ ПЛОСКОГО ТА ЦИЛІНДРИЧНОГО КОНДЕНСАТОРА

### 2.1 Мета роботи

Вивчити розподіл потенціалу в електричних полях:

- 1) одновимірної послідовності  $N$  точкових зарядів;
- 2) циліндричного конденсатора;
- 3) плоского конденсатора та вплив на розподіл поля скінченності розмірів його пластин.

### 2.2 Рекомендації до організації самостійної роботи

Силовую характеристикою електричного поля в кожній точці є вектор напруженості  $\vec{E}$ , а енергетичною характеристикою – потенціал  $\varphi$ . Електричне поле будь-якої системи зарядів можна зобразити за допомогою ліній напруженості або екіпотенціальних ліній. Лінії (або поверхні), вздовж яких потенціал не змінюється:  $\varphi = \text{const}$ , носять назву екіпотенціальних ліній (або поверхонь). Лінії напруженості завжди ортогональні екіпотенціальним лініям (поверхням), причому в кожній точці електричного поля:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi(x, y, z) = -(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}), \quad (2.1)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – одиничні вектори направлені вздовж осі  $x, y, z$ .

Знак « $-$ » у формулі (2.1) означає, що градієнт потенціалу (векторна величина) направлений протилежно вектору  $\vec{E}$ . Сам градієнт направлений в бік найшвидшого зростання потенціалу.

Потенціал точкового заряду визначається за формулою

$$\varphi = k_0 \frac{q}{r}, \quad (2.2)$$

де  $k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – електрична стала;  $q$  – точковий заряд,

$r$  – відстань від заряду до точки спостереження.

Потенціал системи точкових зарядів в даній точці  $A$  обчислюється за формулою

$$\varphi(x, y) = k_0 \left( \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} + \sum_{j=1}^m \frac{Q_j}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}} \right), \quad (2.3)$$

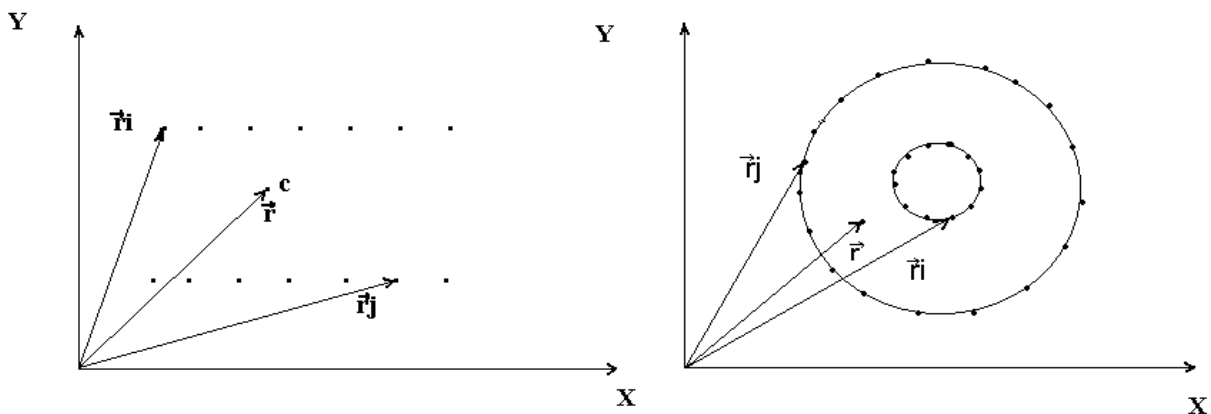
де  $q_i$  – точковий заряд однієї послідовності зарядів;

$Q_j$  – точковий заряд другої послідовності зарядів;

$x, y$  – координати радіуса-вектора, що характеризує положення точки, в якій визначається потенціал;

$x_i, y_i; x_j, y_j$  – координати радіуса-вектора, який характеризує відповідно положення  $i$ -го та  $j$ -го заряду (рис. 2.1).

Враховуючи широкі можливості комп'ютера, ми відразу розглядаємо поле дискретної послідовності зарядів. Можна було б розглядати заряд, розподілений безперервно вздовж ліній. Але такий підхід є складнішим, бо в цьому випадку потенціал треба визначати потенціал через інтеграли, а потім знову ж таки наближено їх обчислювати, розбиваючи лінії, вздовж яких розподілені заряди, на окремі ділянки, тобто замінити інтеграл наближеною сумою, виду (2.3).



а) б)  
Рисунок 2.1 – Конфігурація електродів:  
а) – плоскої форми; б – циліндричної форми

Потенціал дискретної послідовності числа  $n$  зарядів величиною  $q$  буде відрізнятися від рівномірного розподілу з еквівалентною лінійною густиною  $\tau$  лише безпосередньо біля зарядів (в цьому можна впевнитися при виконанні даної роботи, будуючи еквіпотенціальні лінії поля). У випадку, коли заряди знаходяться на прямій (рис. 2.1, а), лінійна густина заряду:

$$\tau = \frac{nq}{x_n - x_1},$$

де  $x_1$  та  $x_n$  – відповідні  $x$ -координати першого та  $n$ -го зарядів. Коли заряди розташовані на колі (рис. 2.1, б)

$$\tau = \frac{nq}{2\pi R},$$

де  $R$  – радіус кола.

Для нескінченно довгих пластин, циліндрів картина еквіпотенціальних ліній в площині, перпендикулярній до них (в площині рисунка) буде такою ж, як і для лінійного розподілу зарядів з лінійною густиною.

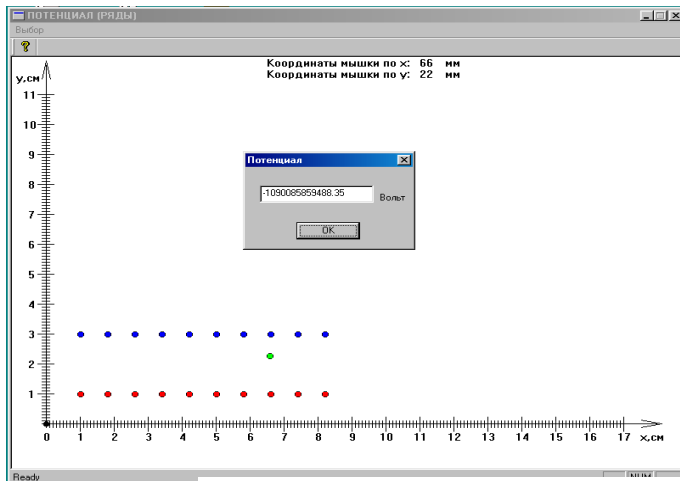
## 2.3 Опис комп'ютерної програми

Програма дозволяє створювати такі розподіли зарядів: один точковий заряд, диполь, заряджена смуга, дві паралельні смуги, два коаксіальні циліндри і таким чином моделювати плоский та циліндричний конденсатори.

Програма дає можливість знайти точки однакового потенціалу для вказаних розподілів зарядів.

«Вимірювання» потенціалу в будь-якій точці з координатами  $(x, y)$  здійснюється за допомогою «зонда», роль якого відіграє курсор «миші». Натискаючи ліву клавішу «миші» в деякій точці отримуємо на екрані висвячені координати точки та значення потенціалу. За отриманими даними користувач має можливість побудувати екіпотенціальні лінії поля даної системи зарядів, а також обчислити напруженість поля.

Число зарядів, відстань між ними можна змінювати в широких межах,



добиваючись такої густини зарядів, коли немає великої різниці між дискретним та безперервним розподілом. Користувач може прослідкувати, як впливає дискретність розподілу зарядів на форму екіпотенціальних ліній.

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 2.2.

Рисунок 2.2 – Інтерфейс

## 2.4 Інструкція користувачу

1. Створіть один точковий заряд  $q_1$  (значення  $q_1$  візьміть з табл. 2.1). Відшукайте точки однакового потенціалу для точок, розташованих на відстані від заряду  $r = r_1; r_2; r_3; r_4$ . З'єднайте точки з  $\varphi = const$ , отримайте екіпотенціальні лінії.

2. Обчисліть тричі наближено значення напруженості за формулою

$$\vec{E} = -\frac{\vec{r}}{r} \frac{\Delta\varphi}{\Delta r}. \quad (2.4)$$

Значення  $\Delta\varphi$  та  $\Delta r$  візьміть для двох сусідніх екіпотенціальних ліній. Обчисліть один раз градієнт, зробивши виміри  $\varphi_1, \varphi_2$  в двох будь-яких близьких точках, які лежать на сусідніх екіпотенціальних лініях, за формулою, аналогічною (2.1):

$$\vec{E} = -\left( \vec{i} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} + \vec{j} \frac{\Delta\varphi}{\Delta y} \right). \quad (2.5)$$

3. Порівняйте результати, отримані за формулами (2.4) і (2.5). Як вони узгоджуються з визначенням градієнта потенціалу?

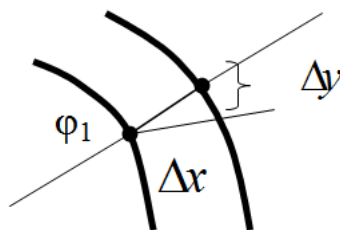


Рисунок 2.3 – До обчислення напруженості поля

4. Створіть системи точкових зарядів, розташованих паралельно одна одній, значення  $q$ ,  $n$ , та  $\Delta x$  візьміть з таблиці 2.1, заряд однієї системи зарядів  $+q$ , другої  $-q$ . (порядок величини  $q \sim 10^{-12}/10^{-14}$  Кл).

5. Знайдіть точки однакового потенціалу, починаючи з точки, що лежить на перетині осей симетрії системи (рис. 2.1, а). Зробіть аналогічні заміри, щоб побудувати не менше трьох екіпотенціальних ліній, розміщених між лінією розташування зарядів та лінією симетрії, яка проходить посередині між системами зарядів. Зробіть заміри для точок не тільки всередині системи зарядів, а й для зовнішніх точок, де вже буде добре видно, що екіпотенціальні лінії стають непаралельними одна одній.

6. Обчисліть напруженість поля поблизу точки с (рис. 2.1, а) – в центрі системи. Якщо екіпотенціальні лінії паралельні, то поле однорідне і величину напруженості поля в конденсаторі можна обчислити (рис. 2.3) за формулою

$$E = \frac{\Delta\varphi}{\Delta y}. \quad (2.6)$$

Порівняйте отриманий результат з результатом обчисленням за формулою, справедливою для випадку двох нескінченних паралельних площин:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{nq}{(x_n - x_l)^2 \varepsilon_0}. \quad (2.7)$$

7. Виконайте завдання п. п 4-6 для «пластин», ширина яких перевищує вибрану в п. 3 в декілька  $m$  разів (дані в табл. 2.1). Як розміри пластин впливають на характер поля?

8. Створити дві системи зарядів, розташованих на концентричних колах з радіусами  $R_1$  і  $R_2$  (дані п. 8). Центр кіл виберіть таким чином, щоб вони не вийшли за межі осей  $x, y$ . Заряд  $q_1$  та  $q_2$  підберіть так, щоб заряд однієї «пластини»  $Q_1$  конденсатора дорівнював  $-Q_2$  – заряду другої «пластини». Побудуйте не менше трьох екіпотенціальних ліній.

Порівнюючи форму екіпотенціальних ліній для плоских та циліндричних пластин зробіть належний висновок щодо відповідності між формою ліній та пластин.

Таблиця 2.1 – Параметри завдань

№	$q_1$	$q$	$\Delta x$	$n$	$m$	$R_1$	$R_2$
1	1	1	2	10	8	10	40
2	2	2	2	10	8	15	45
3	3	3	2	10	8	20	40
4	4	4	2	10	8	20	50
5	5	5	2	10	8	20	45
6	6	6	2	10	8	10	40
7	7	2	3	10	5	20	50
8	8	2	3	10	5	15	45
9	9	3	3	10	5	10	40
10	10	4	3	10	5	15	45
11	11	5	3	10	5	20	40
12	12	6	3	10	5	25	50

## 2.5 Зміст звіту та рекомендації до обробки й аналізу результатів

Зміст повинен містити малюнки побудованих еквіпотенціальних ліній, розрахунки (п. 6) та висновки до п. п 7, 8.

### Контрольні запитання

1. Запишіть формулу потенціалу точкового заряду (2.2).
2. За якою формулою визначається потенціал системи точкових зарядів? (2.3).
3. Запишіть формулу зв'язку напруженості поля з потенціалом (2.1).
4. Опишіть властивості градієнта.
5. Що таке еквіпотенціальні лінії (поверхні). Під яким кутом перетинаються лінії напруженості з еквіпотенціальними лініями?
6. Вивести формули для потенціалу поля в циліндричному та плоскому конденсаторі.
7. Що таке лінійна густина заряду?

### 3 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

#### ВИМІРЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ОПОРУ

#### ПРОВІДНИКІВ ЗА МЕТОДОМ МОСТА УІТСТОНА

##### 3.1 Мета роботи

Вивчити метод вимірювання опору провідників за мостовою схемою та виміряти опір провідників зазначеним методом.

##### 3.2 Рекомендації до організації самостійної роботи

Одним з найбільш точних методів вимірювання електричного опору є метод моста Уїтстона. Міст Уїтстона зображено на рисунку 3.1.

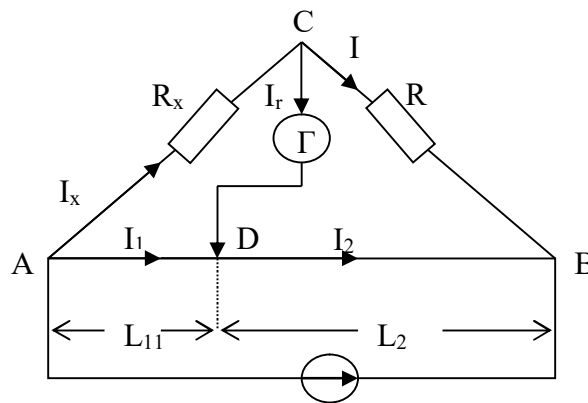


Рисунок 3.1 – Міст Уїтстона

За звичай між точками  $A$  та  $B$  вмикають калібрований дріт – реохорд із ковзним контактом  $D$ ;  $U$  – постійна напруга від джерела струму ( $E$ );  $R$  – відомий еталонний опір;  $R_x$  – невідомий опір;  $G$  – гальванометр;  $L_1$  і  $L_2$  – «плечі реохорда».

Метод вимірювання опору за допомогою моста Уїтстона базується на порівнянні невідомого опору  $R_x$  з відомим еталонним опором  $R$ .

Хай струм в плечах моста та в діагоналі  $CD$  тече так, як показано на рисунку 3.1.

Напрямок обходу контурів виберемо за годинниковою стрілкою. Згідно з першим правилом Кірхгофа алгебраїчна сума струмів у вузлі (нагадаємо, що вузол – це точка, де сходиться не менше трьох віток) дорівнює нулю. Тоді для вузла  $C$  маємо:

$$I_x - I - I_r = 0. \quad (3.1)$$

Оскільки  $I_x$  входить в вузол, беремо його з плюсом, струми  $I_1, I_r$  виходять із вузла – беремо їх з мінусом.

Для вузла  $D$  :

$$I_1 - I_2 - I_r = 0. \quad (3.2)$$

Згідно з другим правилом Кірхгофа алгебраїчна сума падінь напруги на елементах замкненого контура дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, що діють у контурі. Причому, якщо напрям струму в елементі збігається з напрямком обходу контура, то відповідне падіння напруги входить в рівняння з плюсом, якщо не збігається – з мінусом. Якщо напрям дії ЕРС збігається з напрямком обходу, то ЕРС береться з плюсом, не збігається – з мінусом. Виходячи із сформульованих правил отримуємо ще три рівняння:

$$\begin{aligned} \text{для контуру ACDA:} & \quad I_x R_x + I_r R_r - I_1 R_1 = 0; \\ \text{для контуру ABEA:} & \quad I_1 R_1 + I_2 R_2 = -U; \\ \text{для контуру CBDC:} & \quad I R - I_2 R_2 - I_r R_r = 0; \end{aligned} \quad (3.3)$$

де  $R_r$  – внутрішній опір гальванометра;  $R_1$ ,  $R_2$  – опір «плеч» реохорда  $L_1$  та  $L_2$ .

Всього маємо в схемі п'ять віток, п'ять струмів – п'ять невідомих і відповідно п'ять рівнянь для їх визначення.

Змінюючи положення контакту  $D$  (тим самим змінюючи співвідношення між  $L_1$  та  $L_2$ ), можна досягти того, щоб потенціал точки  $D$  став рівним потенціалу точки  $C$  ( $\varphi_D = \varphi_C$ ). В цьому випадку струм через гальванометр дорівнює нулю, міст збалансовано. Враховуючи, що  $I_r = 0$ , систему (3.3) можна спростити:

$$I_x = I, \quad I_1 = I_2, \quad I_x R_x = I_1 R_1, \quad IR = I_2 R_2 \quad (3.4)$$

Поділивши останні два рівняння почленно одне на друге, маємо:

$$\frac{I_x R_x}{IR} = \frac{I_1 R_1}{I_2 R_2} \quad (3.5)$$

Враховуючи перші два рівняння (3.4), вираз (3.5) можна спростити:

$$\frac{R_x}{R} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (3.6)$$

Опір «плеч» реохорда можна визначити за формулами:

$$R_1 = \rho \frac{L_1}{S}, \quad R_2 = \rho \frac{L_2}{S}, \quad (3.7)$$

де  $\rho$  – питомий опір дроту реохорда,  $S$  – площа поперечного перерізу дроту.

Підставляючи значення  $R_1$  та  $R_2$  (3.6) в співвідношення (3.5) отримаємо формулу для обчислення невідомого опору  $R_x$ .

$$R_x = R \cdot \frac{L_1}{L_2} \quad (3.8)$$

Таким чином, підбираючи відповідно співвідношення між  $L_1$  та  $L_2$  (щоб  $I_x = 0$ ), знаючи еталонний опір  $R$ , можна визначити  $R_x$ .

В роботі визначається (вимірюється) опір для випадку, коли  $R_x$  являє собою два опори  $R_{x1}$ ,  $R_{x2}$  з'єднані послідовно та паралельно. Схеми послідовного та паралельного сполучення приведені на рисунку 3.2.

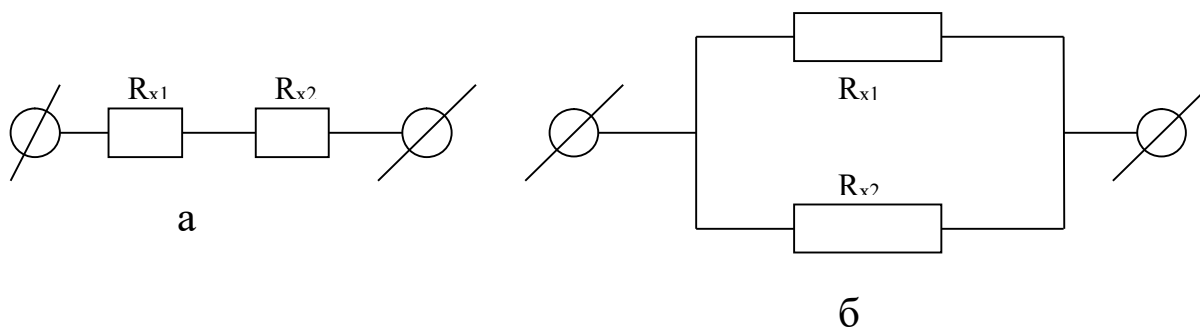


Рисунок 3.2 – З'єднання резисторів:  
а – послідовне;  
б – паралельне

Для послідовного сполучення (див. рис. 2.1, а) загальний опір

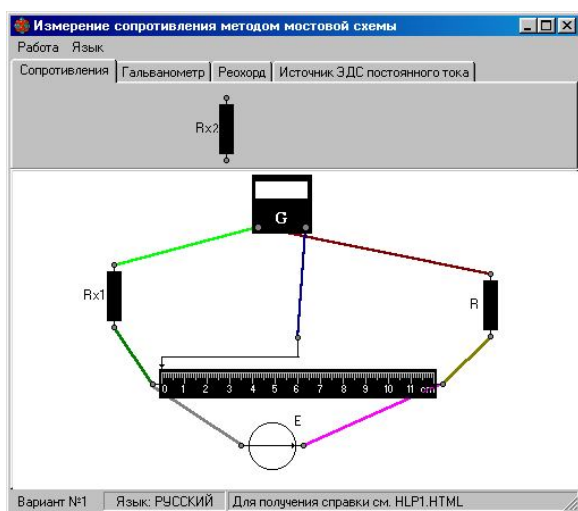
$$R_x = R_{Ix} + R_{2x}. \quad (3.9)$$

Для паралельного сполучення (рис. 3.2, б):

$$R_x = \frac{R_{Ix} R_{2x}}{R_{Ix} + R_{2x}}. \quad (3.10)$$

### 3.3 Опис комп'ютерної програми

Алгоритм обчислень базується на розв'язку системи лінійних



рівнянь, складених за правилами Кірхгофа (3.1–3.3). Програма дозволяє зібрати мостову схему з елементів, перелік яких представлений на основній панелі інтерфейсу (рис. 3.3).

Для цього клацнувши лівою клав'ішею миші, наприклад, на «Реохорд» викликаємо його появу. Натискаючи на ліву клав'ішу можна пересунути елемент в будь-яку точку екрану. Для виконання з'єднань між елементами схеми (рис. 3.3) треба навести курсор на клав'ішу, вивід прибору і як тільки з'явиться хрестик клацнути лівої кнопкою, потім навести

Рисунок 3.3 – Інтерфейс

курсор на вивід другого елемента повторити теж саме. Якщо ви помилилися із з'єднанням, для того, щоб прибрати «провід» треба навести на нього курсор, клацнути спочатку лівою, а потім правою клав'ішею. При появі віконця



«прибрати», навести на нього курсор і клацнути лівою клавішею. Якщо з першого разу щось не вийшло, повторіть операції. Коли схема зібрана натискаємо курсором на вимикач – «вкл.». При цьому підключається двигок реохорда. Наводячи курсор на двигок переміщуємо його вліво-вправо, добиваючись нульового показання гальванометра.

Якщо клацнути лівою клавішею на елемент – опір, ЕРС, висвічується допоміжна панель, за допомогою якої можна встановити певне значення  $R$  або ЕРС.

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 3.3.

### 3.4 Інструкція користувачу

1. Зібрати схему (рис. 3.1).
2. Переміщуючи повзунок реохорда, встановити силу струму, що дорівнює нулю. Виміряти за шкалою довжини «плеч»  $L_1$  та  $L_2$ , результати записати в таблицю вимірювань.
3. За формулою (3.7) обчислити  $R_{x1}$ . Занести результат до таблиці.
4. Відключити  $R_{x1}$  та підключити  $R_{x2}$ , виконати пункти 2, 3.
5. Підключити до клем  $A$ ,  $C$ , як невідомий опір  $R_x$  два резистора з'єднані послідовно, а потім паралельно. Виконати пункти 2, 3.
6. Знаючи опори резисторів  $R_{x1}$ ,  $R_{x2}$  обчислити опір при їх послідовному та паралельному сполученні. Результати занести до таблиці.
7. Знайти похибки вимірювань, враховуючи, що

$$\frac{\Delta R}{R} * 100\% = 2\%, \quad \Delta L_1 = \Delta L_2 = 0,5 \text{ мм}$$

### 3.5 Зміст звіту та рекомендації до обробки і аналізу результатів

Звіт повинен містити: таблицю результатів вимірювань та розрахунки, розрахунок похибок за загальним правилом обчислень похибок для прямих та непрямих вимірювань ( $R_x$ ) (дод. А).

#### Контрольні запитання

1. Сформулювати та записати I правило Кірхгофа. Що таке вузол?
2. Друге правило Кірхгофа.
3. Від чого залежить опір провідників? Записати формулу (3.7).
4. Як визначається опір при послідовному, паралельному з'єднанні резисторів? (3.9–3.10).
5. При якому відношенні “плеч”  $\frac{L_1}{L_2}$  похибка вимірювання  $R_x$  буде мінімальною? (висновок витікає із аналізу формули 3.8).
6. В чому полягає умова балансування моста?

## 4 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4 ОСЦИЛОГРАФУВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

### 4.1 Мета роботи

Ознайомитись з застосуванням електронного осцилографа для спостереження форми сигналу, вимірювання напруги, частоти, різниці фаз, вивчити явища, що виникають при складанні взаємно-перпендикулярних коливань.

### 4.2 Рекомендації до організації самостійної роботи

**Принцип дії електронно-променевої трубки.** Найважливішою деталлю осцилографа є електронно-променева трубка (ЕПТ). Вона складається (рис. 4.1) з скляної колби, всередині якої міститься джерело електронів – катод-К, який нагрівається ниткою розжарення. Катод знаходиться всередині керуючого (циліндричного) електрода. Зміною негативного потенціалу на ньому регулюється кількість електронів, які проходять через його отвір, що змінює яскравість плями на екрані ЕПТ. Перший анод А1 служить для фокусування, а другий А2 для прискорення електронів. названі деталі складають електронну гармату. Дві пари пластин служать для відхилення променя: вертикально відхиляючі пластини (пластини  $Y$ ) – в вертикальній площині, горизонтально-відхиляючі (пластини  $X$ ) – в горизонтальній площині.

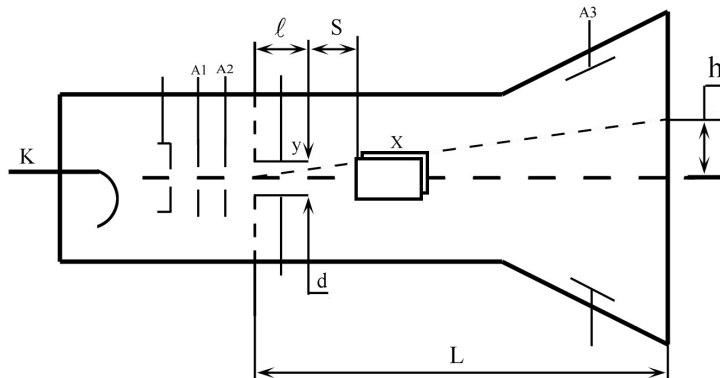


Рисунок 4.1 – Електронно-променева трубка

Якщо прикласти між катодом та другим анодом напругу  $U_a$  (при напрузі між парами пластин  $U_x = 0$ ,  $U_y = 0$ ) пучок електронів буде попадати в центр екрана.

Якщо тепер подати на пластини  $Y$  напругу  $U_y$ , то між ними виникне однорідне поле напруженістю

$$E_y = \frac{U_y}{d}, \quad (4.1)$$

де  $d$  – відстань між пластинами. На кожний електрон, що рухається між пластинами тепер буде діяти сила  $F_y$ , яка спричинятиме його прискорення у вертикальному напрямі

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{eEy}{m} = \frac{eUy}{md}, \quad (4.2)$$

де  $m$  – маса електрона,  $e$  – його заряд.

Вертикальна складова швидкості електрона

$$v_y = a_y \Delta t_y, \quad (4.3)$$

залежить від прискорення  $a_y$  та проміжку часу  $\Delta t$ , протягом якого електрон перебуває між пластинами. Цей проміжок часу визначається довжиною пластини  $l$  та повздовжньою швидкістю електрона  $v_z$

$$\Delta t_y = \frac{l}{v_z}. \quad (4.4)$$

Підставляючи значення  $a_y$  (4.2) у вираз (4.3), а також  $\Delta t_y$  із співвідношення (4.4) отримаємо:

$$v_y = \frac{eU_y l}{mv_z d}. \quad (4.5)$$

Від переднього краю пластин до екрана електрон проходить відстань  $L$ , яка значно більша за довжину пластин  $l$  (див. рис. 4.1) в зв'язку з цим можна знехтувати зміщенням траєкторії електрона в полі пластин порівняно з відхиленням  $h$  плями на екрані трубки і записати

$$\frac{v_y}{v_z} = \frac{h}{l}. \quad (4.6)$$

Підставляючи у співвідношення (4.6) значення  $v_y$  (4.5) знайдемо повздовжню складову швидкості електрона

$$v_z = \sqrt{\frac{eU_y LE}{mdh}}. \quad (4.7)$$

Повздовжню складову швидкості  $v_z$  можемо визначити також із умови, що робота анодної напруги над прискоренням електрона  $eU_a$  іде на зміну кінетичної енергії електрона.

Таким чином:

$$eU_a = \frac{mv_z^2}{2}, \text{ і } v_z = \sqrt{\frac{2eU_a}{m}}. \quad (4.8)$$

Прирівнюючи формули (4.7) та (4.8) отримаємо, що відхилення  $h$  електрона

$$h = \frac{U_y LE}{2dU_a} = U_y S, \quad (4.9)$$

де  $S$  константа для даної ЕПТ (якщо  $U_a$  фіксована). Величина  $S$  носить назву чутливості ЕПТ:

$$S = \frac{h}{U_y}. \quad (4.10)$$

Із визначення (4.10) виходить, що чутливість  $S$  ЕПТ відносно напруги чисельно дорівнює величині зміщення променя на екрані, що приходить на один вольт напруги, прикладеної до пластин.

**Принцип дії генератора розгортки.** Для спостереження ходу процесів в часі (наприклад зміни напруги) на горизонтально відхиляючі пластини необхідно подавати напругу, яка лінійно зростає з часом напругу розгортки. Якщо при цьому на  $Y$  пластини подати напругу, яка вивчається, то електронний пучок опише на екрані графік зміни напруги в часі. Для спостереження періодичних процесів необхідно, щоб напруга розгортки змінювалась періодично. Причому період розгортки  $T$  був кратний періоду сигналу  $T_0$ , тобто  $T = nT_0$  (де  $n$  ціле число). В цьому разі електронний промінь на екрані з кожним повторенням циклу розгортки буде викреслювати одну й ту ж траєкторію. Після проходження по горизонталі до певної точки на екрані, промінь повинен повертатись в початкове положення (зворотний хід). Викладеним вимогам можна задовольнити, якщо напруга  $U_x$  розгортки буде змінюватись за законом, зображеним на рисунку 4.2, де  $t_1$  – час прямого ходу,  $t_2$  – час зворотного ходу променя. Така напруга називається пилкоподібною.

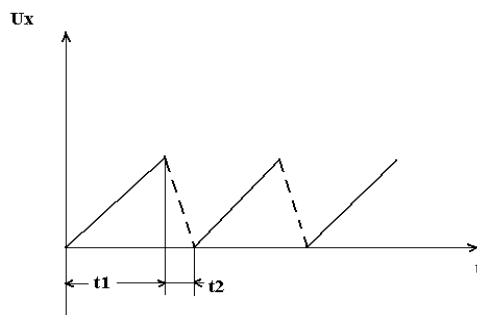


Рисунок 4.2 – Пилкоподібна напруга

### Складання взаємно-перпендикулярних коливань.

Маємо два коливання – одне вздовж осі  $x$ , друге – вздовж осі  $y$

$$X = A \sin(\omega t + \varphi),$$

$$Y = B \sin(\omega t + \Psi). \quad (4.11)$$

Виключаючи з системи рівнянь (4.11) параметр  $t$ , отримаємо рівняння еліпса у вигляді:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - \frac{2xy}{AB} \cos \delta = \sin \delta, \quad (4.12)$$

де  $\delta$  – різниця фаз коливань (4.12)

$$\delta = \varphi - \Psi.$$

Точку перетину еліпса з віссю у можна знайти з (4.12) поклавши  $x = 0$  (рис. 4.3), тоді

$$y_0 = B \sin \delta . \quad (4.13)$$

Таким чином

$$\delta = \arcsin \frac{y_0}{B} \quad (4.14)$$

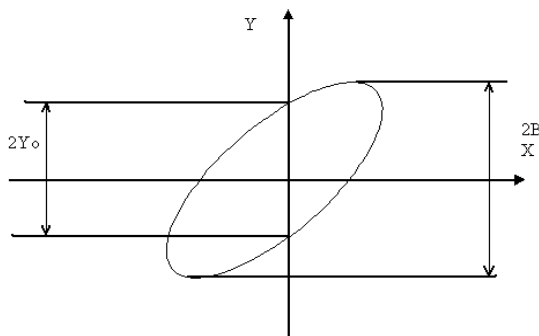


Рисунок 4.3 – Еліпс

### 4.3 Опис комп'ютерної програми

Програма має два режими роботи: в першому можна вивчити призначення відхиляючих пластин ЕПТ, в другому – принцип дії генератора розгортки, та проаналізувати складання двох взаємно перпендикулярних коливань. В першому режимі на панель інтерфейсу програми виведені вікна для завдання параметрів регулювання: напруги на відхиляючих пластинах  $U_y$ , анодної (прискорюючої) напруги  $U_a$ , відстані між пластинами  $d$ , ширини пластин  $l$ , відстаней між анодом та катодом  $B$ , пластинами та екраном  $L$ , початкової «теплової» швидкості електрона, величини яких можна змінювати в широких межах. При цьому на екрані можна спостерігати траєкторію електрона. Рух електрона в ЕПТ описується за допомогою модифікованого алгоритму Ейлера (дод. Б). В другому режимі на екрані ЕПТ, який розміщується в площині екрана дисплея можна спостерігати криві напруги: напругу, яка подається на вертикальні відхиляючі пластини при вимкненій розгортці; коли пилкоподібна напруга подається на горизонтально відхиляючі пластини, та коли на  $x$ - та  $y$ -пластини подаються два синусоїдальних сигнали, амплітуди, частоти та початкові фази яких можна змінювати в широких межах, спостерігаючи фігури Лісажу.

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 4.4.

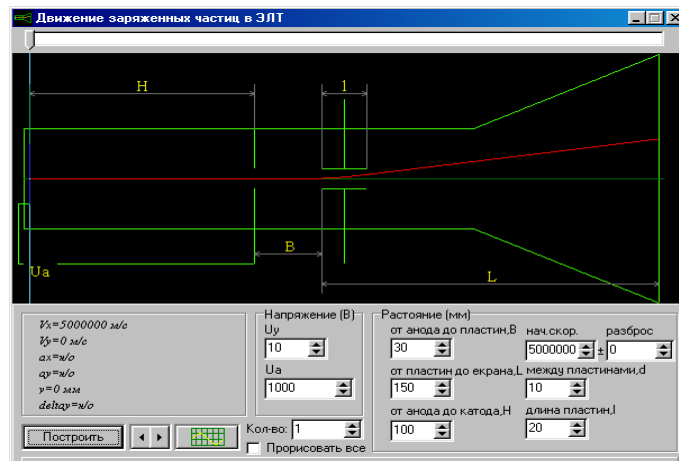


Рисунок 4.4 – Интерфейс

## 4.4 Інструкція користувачу

1. Встановіть значення параметрів відповідно до таблиці 4.1.

Отримайте на екрані траєкторію електрона.

Таблиця 4.1 – Параметри завдань

№	Ua(B)	L(мм)	Uy(B)	d(мм)	№	Ua(B)	L(мм)	Uy(B)	d(мм)
1	1000	140	10	10	7	1000	140	10	10
2	1000	150	10	10	8	1000	150	10	10
3	1200	160	10	10	9	1200	160	10	10
4	1200	160	12	10	10	1200	160	12	10
5	1000	150	8	10	11	1000	150	8	10
6	1000	150	12	12	12	1000	150	14	14

2. Поміняйте полярність  $U_y$ . Як змінилася траєкторія електрона?

3. Задайте кілька послідовних значень напруги  $U_y$  від максимального значення  $+U_y$  до мінімального значення  $-U_y$ . Зробіть висновок, яку лінію буде викреслювати електронний промінь на екрані ЕПТ?

4. За даними пункту 1 обчисліть чутливість ЕПТ за формулою (4.9).

5. Змініть режим програми, натиснувши кнопку  $\sim$ . В цьому режимі можна подавати змінну напругу на обидві пари пластин, причому  $U_x$  та  $U_y$  можуть мати або синусоїдальну або пилкоподібну форму. Подайте синусоїдальну напругу на  $y$ -пластини, на  $x$  пластини  $U_x = 0$ . Зробіть висновок аналізуючи отримане зображення?

6. Подайте пилкоподібну напругу на  $x$  – пластини, на  $y$  – пластини – синусоїдальну. Зарисуйте отримане зображення. Подайте тепер на  $x$  пластини теж синусоїдальну напругу. Порівняйте отриману криву з зарисованою.

Зробіть висновок, чому треба на  $x$ -пластини подавати пилкоподібну напругу, тобто, висловлюючись мовою математики – напругу, яка змінюється

за лінійним законом. В якому з цих двох випадків можна спостерігати істинну форму сигналу, що подається на у-пластини?

7. Підберіть період синусоїди (змінюючи  $\omega_y$ ) так, щоб на екрані було зображено 1, 2, 3,...і т.д. періодів синусоїди. Яким співвідношенням зв'язані період розгортки (пилки) з періодом синусоїди?

8. Подайте на обидві пари пластин синусоїдальну напругу однакової амплітуди:  $A = B$ , та однакової частоти:  $\omega_y = \omega_x$ . Змінюючи різницю фаз  $\delta$  отримайте: пряму; еліпс; коло; пряму з протилежним нахилом. Запишіть відповідні значення різниці фаз  $\delta$ . Визначте різницю фаз за формулою (4.14).

9. Повторіть операції п. 8 для випадку  $A \neq B$ . Якщо подати синусоїдальні напруги на обидві пари пластин, то при кратних співвідношеннях частот  $\omega_x$  та  $\omega_y$  ( $\omega_x = n\omega_y$ , або  $\omega_y = n\omega_x$ ,  $n$ -ціле число) можна спостерігати фігури Лісажу.

10. Подайте на обидві пари пластин синусоїдальну напругу, задовольнивши умовам:  $A = B$ ,  $\delta = 30$  градусів. Зафіксуйте  $\omega_x$ . Змінюючи  $\omega_y$  так, щоб  $\omega_x/\omega_y = 1, 2, 3, 2/3$ , встановіть формулу, за якою при відомому значенні  $\omega_x$  можна обчислити  $\omega_y$ .

11. Повторіть пункт 10, але тепер зафіксуйте  $\omega_y$  і змінюючи відношення  $\omega_x/\omega_y = 1, 2, 3, 2/3$  обчисліть  $\omega_x$ .

#### **4.5. Зміст звіту та рекомендації до обробки і аналізу результатів**

Звіт повинен містити:

- 1) висновки за пунктами 3), 5), 7);
- 2) встановлені залежності (формули) за п. п. 8), 10), 11);
- 3) загальний висновок відносно того, що можна спостерігати та вимірювати за допомогою ЕО.

#### **Контрольні запитання**

1. Будова та принцип дії ЕПТ.
2. Яке призначення електронної гармати, катода, першого анода, другого анода?
3. Яке призначення генератора розгортки?
4. Як можна виміряти напругу за допомогою ЕО?
5. Що таке чутливість ЕЛТ за напругою?
6. Як можна виміряти частоту за допомогою ЕО?
7. Як можна виміряти різницю фаз між двома синусоїдальними напругами однакової частоти?

## 5 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5 ВИВЧЕННЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ КРУГОВОГО ВИТКА ТА СОЛЕНОЇДА

### 5.1 Мета роботи

Вивчити магнітне поле контура з током та системи співвісних контурів, що утворюють котушку з струмом, базуючись на законі Біо – Савара.

### 5.2 Рекомендації до організації самостійної роботи

Магнітне поле  $\Delta \vec{B}$  елемента струму  $(I \Delta \vec{L})$  визначається за законом Біо – Савара

$$\Delta \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[\Delta \vec{L} \cdot \vec{r}]}{|\vec{r}|^3}, \quad (5.1)$$

де  $\mu_0$  – магнітна стала вакууму,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Тл} \cdot \text{м} / \text{А}$ ,  $I$  – величина постійного електричного струму,  $\vec{r}$  – радіус-вектор, який характеризує положення точки, в якій створюється величина індукції  $\Delta B$  по відношенню до елемента  $(I \Delta \vec{L})$ .

Закон Біо – Савара має загальний характер і в принципі може бути використаний для визначення магнітного поля, яке створюється провідником із струмом будь-якої форми. Зрозуміло, що ніяких ізольованих ділянок струму не існує і провідник повинен утворювати замкнене коло. Однак ми можемо наближено уявити безперервний провідник у вигляді ряду дискретних ділянок. Тоді вектор індукції  $\vec{B}$  в будь-якій точці простору можна визначити за допомогою принципу суперпозиції. Для нашого випадку кінчених елементів струму

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N \Delta \vec{B}_i, \quad (5.2)$$

де  $m$  – число елементів, на які розбивається контур. В скалярному вигляді

$$B_x = \sum_{i=1}^m \Delta B_{xi}, B_y = \sum_{i=1}^m \Delta B_{yi}, B_z = \sum_{i=1}^m \Delta B_{zi}. \quad (5.3)$$

Вклад кожної з ділянок довжиною  $\Delta L$  розташованої в точці  $\vec{r}_i$  в магнітне поле в точці  $\vec{r}$  (рис. 5.1) визначається за формулами (в проекціях)

$$\begin{aligned} \Delta B_x(\vec{r}) &= A[\Delta L_y(z - z_i) - \Delta L_z(y - y_i)]/|\vec{r} - \vec{r}_i|^3, \\ \Delta B_y(\vec{r}) &= A[\Delta L_z(x - x_i) - \Delta L_x(z - z_i)]/|\vec{r} - \vec{r}_i|^3, \\ \Delta B_z(\vec{r}) &= A[\Delta L_x(y - y_i) - \Delta L_y(x - x_i)]/|\vec{r} - \vec{r}_i|^3, \end{aligned} \quad (5.4)$$

де  $|\vec{r} - \vec{r}_i|^3 = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{\frac{3}{2}}$ .



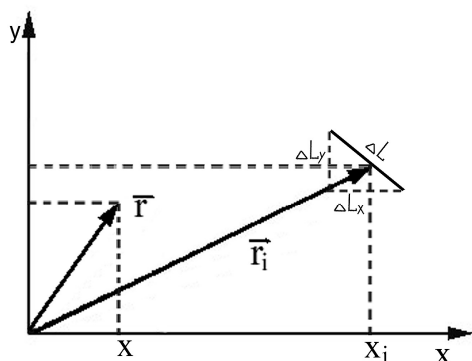


Рисунок 5.1 – Внесок ділянок

Для магнітного поля на осі, що проходить через центр системи витків можна отримати аналітичний вираз

$$B = \frac{l}{2} B_0 (\cos \theta_1 + \cos \theta_2), \quad (5.5)$$

де кути  $\theta_1$  та  $\theta_2$  показані на рисунку 5.2, на якому схематично зображена котушка із струмом,  $B_0$  – індукція всередині довгого соленоїда

$$B_0 = \mu_0 \frac{N}{l} I. \quad (5.6)$$

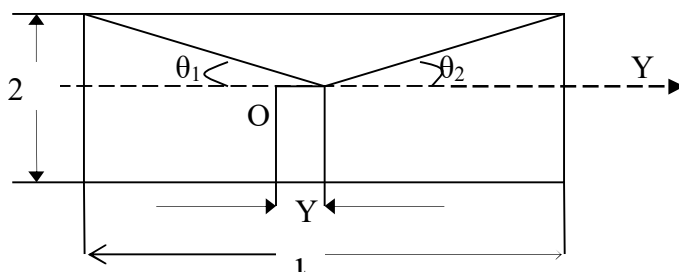


Рисунок 5.2 – Котушка зі струмом

### 5.3 Опис комп'ютерної програми

Програма обчислює та рисує силові лінії магнітного поля кругового витка із струмом, який лежить в площині  $xz$ , та системи  $N$  співвісних витків (рис. 5.2). Оскільки система має вісь симетрії, досить представити силові лінії в одній площині, яка проходить через неї. Цією площиною є площина  $xu$ , вона виступає в ролі екрана. Обчислення виконуються за формулами (5.3), (5.4). Інтерфейс програми має основну та дві допоміжні панелі. На основній панелі виводяться вікна з параметрами котушки: це радіус витка, висота соленоїда, число елементів, на які розбивається виток при обчисленні індукції та загальне число елементів котушки. На одній з допоміжних панелей можна вибрати координати точки, з якої програма починає викреслювати силові лінії. За допомогою другої панелі можна визначити під яким кутом малювати силові лінії у трьохвимірному просторі. Програма обчислює значення індукції в будь-якій точці. Підводячи курсор в будь-яку точку можна «виміряти» індукцію  $B$  та координати точки. Програма дозволяє також регулювати швидкість викреслювання силових ліній та їх густину. Розміри на екрані дисплею вимірюються в пікселях.

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 5.4.



## 5.4 Інструкція користувачу

1. Створіть один виток із струмом. Для цього виберіть однакове число «ділянок на витку» та «разом ділянок». «Відстань» між лініями, яка регулює густину ліній встановіть рівною 20 пікселям. Отримайте картину силових ліній для одного витка магнітного диполя. Зарисуйте її. Запишіть координати центра витка та значення індукції.

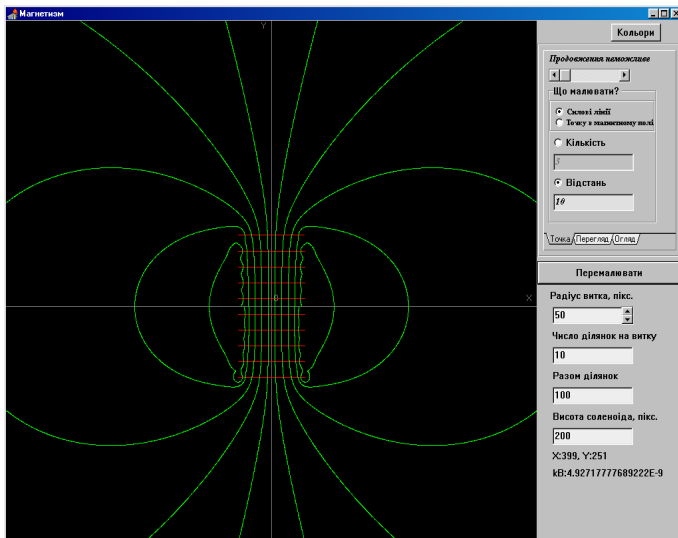


Рисунок 5.3 – Інтерфейс

2. Збільшуючи число «ділянок на витку» в два, три і т. д. разів, прослідкуйте як змінюється точність розрахунку (шляхом порівняння  $B_1 - B_2$ ,  $B_2 - B_3$ , і т.д. різниця  $B_n - B_{n+1}$  повинна зменшуватись із ростом  $n$ ). Вибираючи «кут нахилу» прослідкуйте, як змінюється при цьому апроксимація кругового витка ломаною лінією, внаслідок його розбивки на елементи  $\Delta L$ .

Встановіть довжину котушки  $l = 200$  пікс,  $R = 50$  пікс, координати початкової

точки для розрахунку силової лінії покладіть рівними  $R_{0x} \approx 50$  пікс,  $R_{0y} = R_{0z} = 0$ . Збільшити густину силових ліній (шляхом зменшення «відстані»), встановіть «Разом ділянок» – 30. Збільшити число витків. Прослідкуйте, як ведуть себе силові лінії (яка їх форма) поблизу витків, чи перетинають вони циліндричну поверхню, на якій лежать витки?

4. Запишіть значення індукції в центрі соленоїда (параметри візьміть за таблицею). Зніміть залежність  $B_0(l)$ , тобто виміряйте шість разів  $B_0$  в центрі соленоїда для шести різних значень довжини котушки. Запишіть значення  $B_0$  та відповідні їм значення  $l$ .

5. Встановіть параметри соленоїда у відповідності з таблицею завдань (5.1). Виміряйте та запишіть  $B_0$  в центрі соленоїда. Запишіть ще шість значень  $B_0$  для шести значень відстані  $u$  від центра соленоїда.

Таблиця 5.1 – Параметри завдань

№	L	R	Разом ділянок	№	L	R	Разом ділянок
1.	500	50	300	7.	300	60	200
2.	200	50	200	8.	300	40	200
3.	500	100	200	9.	400	50	250
4.	300	70	200	10.	300	50	200
5.	400	80	300	11.	300	30	300
6.	500	90	300	12.	500	80	300

### 5.5 Зміст звіту та вказівки до обробки і аналізу результатів

Результати вимірювань подайте у вигляді таблиць та графіків. За пунктом 4 побудуйте графік  $\frac{B(l)}{B_0} = f(l)$ , зробіть висновок, як змінюється відношення  $\frac{B(l)}{B_0}$  з ростом довжини соленоїда? За пунктом 5) побудуйте графік  $\frac{B(y)}{B_0} = f(y)$ . На одному рисунку для порівняння побудуйте залежність  $f(y) = \frac{1}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$ . Зробіть висновок.

#### Контрольні запитання

1. Що таке «елемент струму»?
2. Запишіть закон Біо – Савара у векторній формі, у скалярній формі.
3. В чому полягає принцип суперпозиції для магнітного поля?
4. Запишіть формулу для індукції довгого соленоїда.

## 6 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6

### ВИЗНАЧЕННЯ ВІДНОШЕННЯ ЗАРЯДУ ЕЛЕКТРОНА ДО ЙОГО МАСИ МЕТОДОМ ФОКУСУВАННЯ ПУЧКА ЕЛЕКТРОНІВ ПОЗДОВЖНІМ МАГНІТНИМ ПОЛЕМ

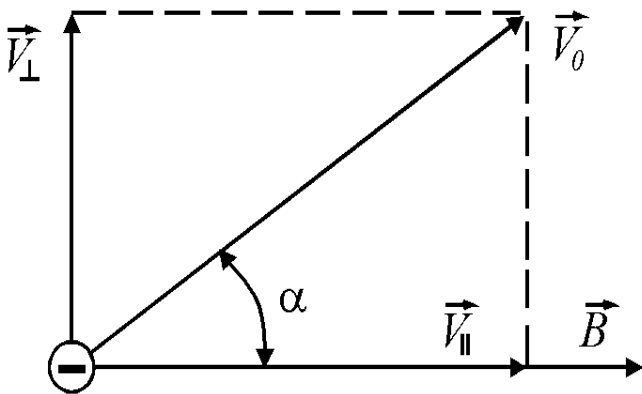
#### 6.1 Мета роботи

Вивчити характер руху зарядженої частинки в магнітному полі в залежності від напрямку її руху по відношенню до вектора індукції та визначити питомий заряд електрона  $\frac{e}{m}$ .

#### 6.2 Методичні рекомендації до організації самостійної роботи

Коли в магнітне поле з індукцією  $\vec{B}$  влітає електрон з швидкістю  $\vec{v}$  під кутом  $\alpha$  до ліній поля (рис. 6.1), на нього починає діяти сила Лоренца

$$\vec{F} = e[\vec{v} \cdot \vec{B}], \quad (6.1)$$



яка у випадку однорідного поля являє собою доцентрову силу

$$ev_{\perp}B = \frac{mv_{\perp}^2}{r}, \quad (6.2)$$

де  $v_{\perp}$  – складова швидкості електрона, перпендикулярна вектору  $\vec{B}$ ,  $e$  – заряд,  $m$  – маса електрона.

Рисунок 6.1 – Складові швидкості електрона відносно вектора індукції

Сила Лоренца примушує електрон рухатися вздовж кола в площині, перпендикулярній  $\vec{B}$ . Радіус кола  $r$  визначається із співвідношення (6.2)

$$r = \frac{mv_{\perp}^2}{eB}. \quad (6.3)$$

На поздовжню складову швидкості  $v_{\parallel}$  сила Лоренца не впливає. Складова швидкості  $v_{\parallel}$  переміщує електрон вздовж вектора  $\vec{B}$  (вздовж осі  $z$ ), (рис. 6.1). Таким чином електрон буде приймати участь у двох рухах – русі

вдovж кола з швидкістю  $v_{\perp}$  та русі в напрямку поля з швидкістю  $v_{\parallel}$ . В результаті електрон буде рухатися вдovж гвинтової лінії, крок якої дорівнює

$$l = v_{\parallel} T. \quad (6.4)$$

Період  $T$  в (6.4) можна знайти із співвідношення

$$T = \frac{2\pi}{v_{\perp}}, \quad (6.5)$$

або, використовуючи вираз для  $r$  (6.3), отримаємо

$$T = \frac{2\pi m}{eB}. \quad (6.6)$$

Із співвідношень (6.4), (6.5) виходить, що в однорідному магнітному полі вздовжня складова швидкості не зазнає змін. Таким чином, електрони з різними значеннями  $v_{\perp}$  за один оберт переміщуються в повздовженому напрямі на однакову відстань  $l$  і сфокусуються в одній точці.

За звичай для визначення відношення  $\frac{l}{m}$  використовують осцилографічну електронно–променеву трубку, вміщену в соленоїд (рис. 6.2), в якій створюється вузький пучок електронів, що мають однакову швидкість  $v_{\parallel}$ . Пролітаючи між вертикально-відхиляючими пластинами, під дією змінної напруги  $U_y$  (що подається на ці пластини), електрони отримують вертикальну складову швидкості  $v_y$ . Різні електрони будуть мати різні швидкості  $v_y$ . На екрані трубки буде видно вертикальну лінію, довжина якої буде залежати від максимальної величини  $v_y$ , яка в свою чергу буде залежати від амплітуди  $U_y$ .

За допомогою соленоїда, надітого на трубку (рис. 6.2) створюють спочатку слабе магнітне поле. Електрони починають рухатись у трубці вдovж гвинтової лінії, вертикальна лінія на екрані електронно–променевої трубки, що утворюється внаслідок бомбардування електронами повернеться на деякий кут

$$\varphi = \omega t = 2\pi \frac{t}{T}, \quad (6.7)$$

який залежить тільки від  $B$  (або від величини струму  $I$  в соленоїді). Із збільшенням  $I$  кут  $\varphi$  буде зростати, а радіус гвинтової лінії буде зменшуватися. При деякому значенні струму  $I_{\phi}$  (відповідно індукції  $B_{\phi}$ ) кут  $\varphi$  досягне  $180^{\circ}$ , а пряма лінія стягнеться в точку. Визначивши  $B_{\phi}$  можна обчислити  $\frac{e}{m}$ .

Для цього в формулу (6.4) підставимо значення  $T$  із співвідношення (6.6), тоді отримаємо:

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi\nu_{II}}{lB_{\Phi}}, \quad (6.8)$$

Індукцію магнітного поля соленоїда визначають формулою

$$B_{\Phi} = \frac{\mu_0 I_{\Phi} n}{L}, \quad (6.9)$$

де  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \text{Гн/м}$  – магнітна стала;  $I_{\Phi}$  – значення струму в соленоїді, за якого відбувається фокусування електронів;  $n$  – число витків соленоїда;  $L$  – його довжина.

Підставивши значення  $B_{\Phi}$  (6.9) в формулу (6.8) знайдемо робочу формулу для визначення питомого заряду електрона.

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi\nu_{II} L}{\mu_0 I_{\Phi} n l}. \quad (6.10)$$

### 6.3 Опис комп'ютерної програми

Програма розраховує та виводить на екран траєкторію руху електронів в магнітному полі. Рух електрона описується за допомогою модифікованого алгоритму Ейлера (дод. Б). Для управління програмою створено головну панель та три допоміжні панелі.

На головній панелі програми можна вибрати площину спостереження руху частинки:  $XY, ZX, ZY$  або трьохвимірний простір –  $XYZ$  (рис. 6.2). Зображення можна переміщувати вліво, вправо, вгору, вниз, змінювати його масштаб виділяти одну частинку з групи частинок, «проганяти» її вздовж траєкторії в ручному режимі.

Перша допоміжна панель – «основні параметри». В ній налагоджують такі параметри як: маса частинки  $m$  [кг], заряд  $q$  [Кл], крок в час  $t$  [с], а також кількість кроків, які обчислюються – «візуалізовані кроки» та кількість «невидимих кроків», які обчислюються між двома сусідніми візуалізованими.

Друга допоміжна панель – «Параметри котушки». На ній встановлюються: радіус котушки  $R$  [м], число витків  $n$ , число  $N$ , на яке розбивається виток котушки при обчислюванні індукції  $B$  в заданій точці простору (за формулою Біо – Савара – Лапласа), довжина котушки  $L$  [м], та сила струму в соленоїді  $I$  [А]. Можна також встановити тип поля «однорідне» або «неоднорідне». Для однорідного поля  $B$  обчислюються один раз. Для неоднорідного поля обчислення індукції обчислюється для кожного кроку, при цьому швидкість обчислень значно знижується.

Третя допоміжна панель – початкові швидкості дає можливість вибрати кількість електронів траєкторії яких обробляються одночасно (від одного до п'яти) та встановлювати їх початкові швидкості  $v$  [м/с].

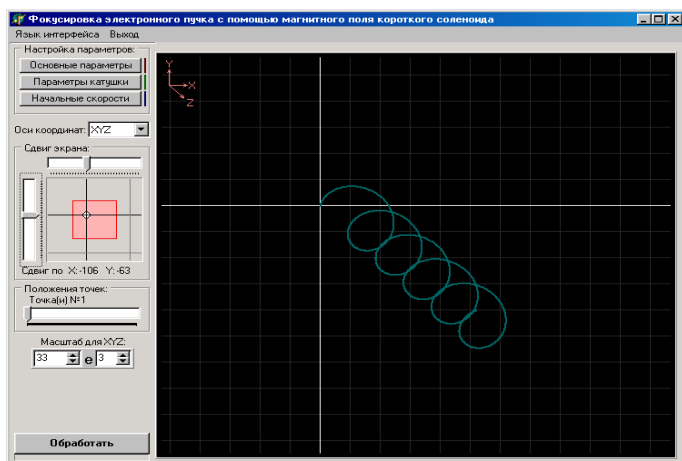
Програма дає можливість обчислювати та спостерігати рух електронів в магнітному полі в широкому діапазоні зміни вказаних параметрів, добираючи їх таким чином, щоб добитися фокусування електронів поздовжнім магнітним полем.

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 6.2.

## 6.4 Інструкція користувачу

1. Виберіть однорідне магнітне поле. Вибираючи відповідні значення складових початкової  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  отримайте прямолінійну траєкторію для одного електрона вздовж осі  $Z$ , кругову траєкторію в площині  $XY$ .

2. Встановіть  $I=100\text{A}$ . На панелі «Основные параметры» виберіть максимальне «число шагов» – 1 000. Підберіть значення складових швидкості



$v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  так, щоб спостерігалася спіральна траєкторія (При цьому повинно бути  $v_x, v_y \sim 10^6 \text{ м/с}$ ,  $v_z \sim 10^5 \text{ м/с}$ ). Зарисуйте й поясніть отримані криві.

3. Змініть  $v_x$  на  $-v_x$ ,  $v_y$  на  $-v_y$ . Отримайте проекції траєкторії на площини

$XY, ZX, ZY$ . Порівняйте їх з кривими пункту 2. Поясніть причини змін.

4. Задайте початкові швидкості  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  для п'яти електронів, дані візьміть з таблиці 6.1. В цій таблиці приведені величини швидкості для першої частинки. Значення  $v_y$  для інших чотирьох електронів підберіть так, щоб вони відрізнялись від  $v_{y1}$  на кілька одиниць. Наприклад для першого варіанту  $v_{x1} = 0 \text{ м/с}$ ,  $v_{y1} = 4 \times 10^5 \text{ м/с}$ ,  $v_{z1} = 5 \times 10^6 \text{ м/с}$ ). Тоді  $v_{y2} = 5 \times 10^5 \text{ м/с}$ ,  $v_{z2} = 4 \times 10^6 \text{ м/с}$  і т. д. Головне, щоб на екрані, траєкторії п'яти частинок можна було добре розрізнити. Складова швидкості  $v_x$  для всіх частинок  $v_x = 0$ , складова  $v_z$  для всіх п'яти частинок – однакова.

Змінюючи величину струму, добийтесь фокусування електронів. Щоб точніше визначити момент фокусування скористайтесь масштабом. Якщо траєкторії виходять за межі радіуса котушки  $R$ , змініть  $R$  так, щоб електрони знаходились в середні котушки.



Таблиця 6.1 – Параметри завдань

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$v_y$	4	2	3	3	2	2	5	3	3	4	3	4
$v_z$	6	4	5	5	4	6	7	6	5	5	6	6

Примітка:  $v_y \sim 10^5 \text{ м/с}$  ;  $v_x \sim 10^6 \text{ м/с}$  ,  $v_x = 0$ .

Початкове значення  $I = 1 \text{ А}$  , кінцеве  $I = I_\phi$  - струму фокусування , коли всі електрони зберуться в одну точку. Спостерігайте траєкторії електронів в різних площинах . За допомогою движка «Положение точек» при одному із значень  $I < I_\phi$  пройдіться вздовж траєкторій. Через кінцеві точки «проведіть» пряму, приклавши лінійку до екрана. Уявіть, якби рухалось не 5 електронів а безліч (як в електронному пучку), яка картина спостерігалася б на екрані?

5. Запишіть значення струму  $I_\phi$  . Обчисліть значення  $\frac{e}{m}$  .

6. Повторіть п. п. 4,5 ще двічі.

7. Обчисліть абсолютну похибку вимірювання  $I_\phi$  та  $\frac{e}{m}$  .

### 6.5 Зміст звіту та рекомендації до обробки і аналізу результатів

Звіт повинен містити:

1) мету роботи;

2) висновки за пунктами 1–3 завдання – як змінюється характер руху електрона в залежності від взаємної орієнтації векторів швидкості  $v$  та індукції  $B$  для трьох випадків:  $v$  та  $B$  паралельні одне одному,  $v$  перпендикулярна  $B$  , вектори  $v$  та  $B$  направлені під деяким кутом  $0 < \alpha < \pi/2$ ;

3) обчислення величини  $\frac{e}{m}$  та похибок вимірювання  $\frac{e}{m}$  ;

4) пояснення, як відбувається процес фокусування електронів в магнітному полі.

### Контрольні запитання

1. Що таке сила Лоренца, коли вона виникає?

2. Проаналізуйте, як змінюється сила Лоренца в залежності від взаємної орієнтації векторів  $v$  та  $B$  , коли вона максимальна, мінімальна?(6.1).

3. Як буде рухатися заряджена частинка в однорідному магнітному полі, коли:  $v \perp B$ ;  $v \parallel B$ ;  $v$  та  $B$  направлені під кутом  $\alpha$  ?

4. Яку установку використовують для визначення відношення заряду електрона до його маси?

5. Як відбувається фокусування електронів у магнітному полі?

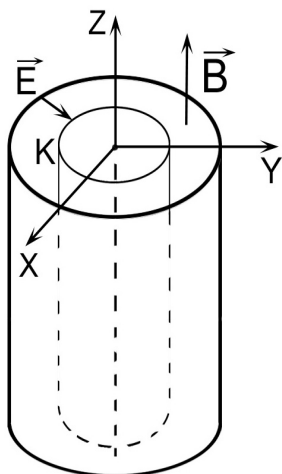
## 7 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7 ВИЗНАЧЕННЯ ПИТОМОГО ЗАРЯДУ ЕЛЕКТРОНА МЕТОДОМ МАГНЕТРОНА

### 7.1 Мета роботи

Визначити питомий заряд електрона через його рух у взаємно-перпендикулярних електричному та магнітному полях.

### 7.2 Вказівки до організації самостійної роботи

Рух електрона в реальному приладі відбувається в кільцевому проміжку між катодом та анодом двоелектродної лампи (рис. 7.1).



Нитка розжарення (катод)  $K$  розташовується вздовж осі циліндричного анода  $A$  так, що електричне поле  $\vec{E}$  виявляється направленим вздовж радіуса. Лампа розміщується всередині соленоїда, який утворює магнітне поле, з індукцією  $\vec{B}$ , яка направлена паралельно катоду. Описаний прилад являє собою магнетрон.

Будемо вважати, що початкова (теплова) швидкість електрона, що вилетів із катода дорівнює нулю. Тоді при загальній орієнтації електричного та магнітного полів рух електрона буде відбуватися у площині, перпендикулярній магнітному полю. Двовимірний рух електрона описується рівняннями динаміки у вигляді

Рисунок 7.1 –  
Діод

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} \quad (7.1)$$

Рівняння (7.1) будемо розв'язувати за допомогою алгоритму Верле [дод. Б]. Для успішного розв'язання задачі нам необхідно знати прискорення  $\vec{a}$ , як функцію координат. Коли електрон рухається між катодом та анодом, на нього діють сили:

- 1) з боку електричного поля, яке створюється анодною напругою  $U_a$ ;
- 2) магнітна сила Лоренца, яка діє з боку магнітного поля (коли струм в соленоїді  $J_c \neq 0$ );
- 3) сила з боку електричного поля, яке створюється об'ємним електричним зарядом з певною густиною  $\rho$ , що знаходиться між анодом та катодом.

Якщо розглядати електроди двоелектродної лампи як циліндричний конденсатор, то електричне поле змінюється із зміною відстані  $r$  (від осі симетрії системи) за формулою

$$E = \frac{U_a}{\ln r_a / r_k} \cdot \frac{1}{r}, \quad (7.2)$$

де  $r_a$  – радіус анода,  $r_k$  – радіус катода.

Як відомо, сила Лоренца, яка діє на електрон

$$\vec{F}_L = -e[\vec{v}\vec{B}], \quad (7.3)$$

де  $v$  – швидкість електрона,  $B$  – індукція магнітного поля.

Якщо припустити, що густина електричного заряду між катодом та анодом змінюється внаслідок розходження електронного пучка за законом  $\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{\sqrt{r}}$  (де  $\rho_0$  – константа для даної конструкції лампи), то виходячи з теореми Гауса, для напруженості електричного поля можна отримати вираз

$$E_\rho = \frac{2}{3} e \rho_0 \frac{(r^{3/2} - r_k^{3/2})}{r} \quad (7.4)$$

Таким чином прискорення електрона в рівняннях (7.1) буде обчислюватися за формулою

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_L}{m} + \frac{e\vec{E}}{m} + \frac{e\vec{E}_\rho}{m} \quad (7.5)$$

де  $\vec{F}_L$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{E}_\rho$  – визначаються формулами (7.2), (7.3), (7.4).

### 7.3 Опис комп'ютерної програми

Програма базується на модифікованому алгоритмі Ейлера (дод. Б), який описує двовимірний рух електрона в перехрещених магнітному та електричному полях. Програма має основну – «траєкторія» та допоміжну – «Схема та настройки» панелі. В режимі «траєкторія» програма дозволяє вивчити траєкторію руху електрона в широких межах; зміни анодної напруги, величини струму в соленоїді, початкової (теплової) швидкості електрона, з якою він вилітає із катода. Програма також дає можливість спостерігати рух будь-якого числа електронів, які вилітають із катода з різними початковими швидкостями, прослідкувати вплив на рух електрона (або електронів) просторової густини заряду, який завжди існує в проміжку між анодом та катодом двоелектродної лампи. В процесі роботи з програмою є також можливість змінювати параметри електронної лампи – радіус катода, анода, регулювати точність обчислень, змінюючи крок переміщення електрона, змінювати масштаб зображення, його положення відносно центра екрана і,

нарешті, вибрати приємні кольори зображення траєкторії, анода, катода та електронів.

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 7.2.

## 7.4 Інструкція користувачу

1. Значення густини об'ємного заряду  $\rho_0$ , індукції  $B$ , анодної напруги  $U_a$  покласти рівними нулю. Початкову швидкість вибрати у відповідності з таблицею 7.1. Яку траєкторію має електрон?

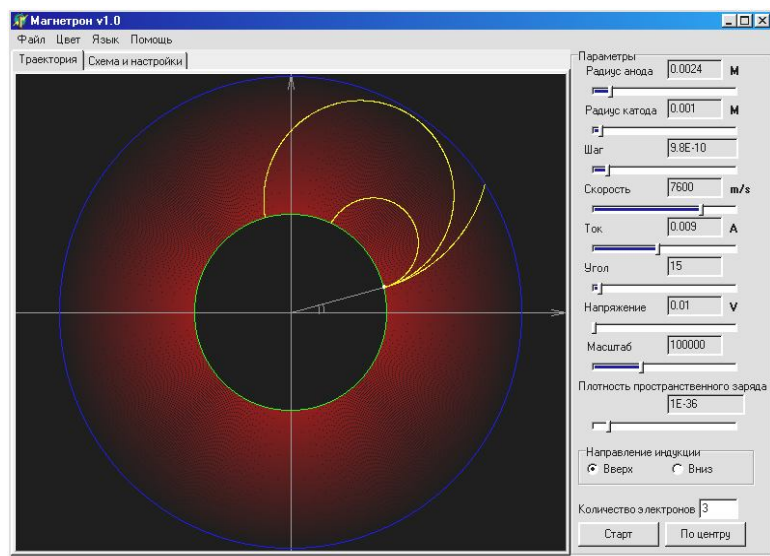


Рисунок 7.4 – Інтерфейс

3. Повторіть дослід п.3 п'ять разів, збільшуючи кожного разу напругу  $U_a$  на 0,1В. Отримані дані запишіть в таблицю 7.1.

Таблиця 7.1 – Параметри завдань

№ <sub>в</sub>	V(м)	U <sub>a</sub> (В)	V(м)	№ <sub>в</sub>	V(м)	U <sub>a</sub> (В)	V(м)
1	3000	2,5	500	7	750	1	1000
2	2000	2		8	1250	2	1000
3	1000	1,5		9	1750	1,5	1000
4	500	1		10	2250	1	500
5	1500	1,2		11	3250	2	500
6	2500	1,8		12	2750	2,5	500

5. Обчисліть відношення  $\frac{e}{m}$  і знайдіть його середнє значення.

6. Встановіть швидкість електрона, анодну напругу згідно з таблицею. Чому при малих швидкостях траєкторія електрона утворює петлю, при збільшенні величини індукції?

7. Змінюючи густину об'ємного заряду  $\rho_0$  зробіть висновок, як  $\rho_0$  впливає на величину  $B_x$ ?

8. Встановіть початкову швидкість згідно з таблицею, задайте кількість електронів:  $n=2, 3, 5$ .

9. Зробіть висновок, як впливає на значення  $B_x$  початкова швидкість.

(В залежності від значення  $n$  початкова швидкість 1-го електрона  $v = \frac{v_0}{n}$ , другого  $\frac{2v_0}{n}$  і т.д.).

### 7.5 Зміст звіту та рекомендації до обробки та аналізу результатів

Звіт повинен містити:

1) три види траєкторії(зарисовані): пряму, криву, петлеву з поясненнями, чому вони мають такий вигляд ?

2) таблицю із значеннями  $B_x$  для п'яти значень  $U_a$ , визначені значення  $\frac{e}{m}$  та  $< \frac{e}{m} >$ ;

3) висновки щодо впливу початкової швидкості, густини об'ємного заряду на величину  $B_x$ .

### Контрольні запитання

1. Що являє собою прилад магнетрон?
2. Які сили діють на електрон при його русі в лампі?
3. Запишіть формулу для сили Лоренца у векторному вигляді?
4. Проаналізуйте формулу для сили Лоренца. Коли сила буде максимальна, мінімальна?
5. Який напрямок буде мати сила Лоренца на рисунку 7.1?
6. Якими рівняннями описується рух електрона?
7. Який наближений метод розв'язку рівнянь руху використовується в даній роботі?

## СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Савельев И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1978. – т. 2. – С. 480.
2. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М. : Мир, 1965. – т. 1. – С. 270.
3. Гулд Х. Компьютерное моделирование в физике / Х. Гулд, Я. Тобочник. – М. : Мир, 1990. – ч. 1. – С. 349.
4. Безуглый А. В. Использование информативных технологий в преподавании общего курса физики. Образование и виртуальность / 2001.Сб. трудов 5-й Междунар. Конф. УАДО / А. В. Безуглый, В. В. Калинин, В. А. Стороженко. – Харьков – Ялта. 2001. – С. 308–314.
5. Безуглый А. В. Разработка компьютерного учебного пособия на примере разделов современной физики // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : збірник наукових праць, т. 2. / А. В. Безуглый, В. В. Калинин, Д. В. Калинин. – Кривий Ріг, НМетАУ. 2002. – С. 14–17.
6. Безуглый А. В. Виртуальный лабораторный практикум по разделу курса физики «Электричество и магнетизм» // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : збірник наукових праць. Вип. 5, т. 2. – Кривий Ріг, НМетАУ. 2005. – С. 26–34.
7. Безуглый А. В. Комп'ютерне моделювання вимірювання електричного опору провідників за методом моста Уїтстона // Матеріали X Міжнар. наук.-техн. конф. Новітні комп'ютерні технології. Севастополь. 2012. – С. 221–223.

## ДОДАТОК А

### Обробка результатів вимірювань

#### Д.А.1 Основні положення теорії похибок

Якими б точними не були прилади, досконалими методи вимірювань, при вимірюванні фізичної величини  $X$  (часу, довжини, тощо) неможливо отримати точне, «істинне значення» величини  $X_{ict}$ .

Якщо позначити  $X_i$  результат деякого  $i$ -того вимірювання величини  $X$ , то величину  $\Delta X_i = X_i - X_{ict}$  називають абсолютною похибкою даного вимірювання. Для характеристики точності вимірювання вводять також поняття відносної похибки

$$\delta = \Delta X \cdot X_{ict} \quad (\text{Д А.1})$$

Завдання яке стоїть перед теорією похибок є визначення похибок вимірювання фізичних величин.

Вимірювання поділяються на прямі та непрямі. Прямим називають вимірювання, завдяки якому значення величини знаходять безпосередньо з показань приладу. Прикладами прямих вимірювань є: вимірювання температури за допомогою термометра; довжини штангенциркулем – тощо.

При непрямих вимірюваннях значення фізичної величини знаходять завдяки відомій залежності цієї величини від величин, які можуть бути виміряні шляхом прямих вимірювань. Наприклад, густину тіла – за його масою та розмірами, тощо.

Найважливіший клас похибок – випадкові похибки. Ці похибки обумовлені недосконалістю наших органів чуття, а тому не можуть бути усунуті.

#### Д.А.2 Розрахунок випадкових похибок для прямих вимірювань

Хай, вимірюючи багато разів деяку фізичну величину, наприклад, час, за який тіло проходить одну і ту ж відстань  $S$  отримали ряд значень  $X_1, X_2, X_3 \dots X_n$ , тоді за  $X_{ict}$  приймають середнє арифметичне

$$\langle X \rangle = (X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) : N = 1/N \cdot \sum X_i, \quad (\text{Д А.2})$$

яке при  $N \rightarrow \infty$  повинно співпадати з  $X_{ict}$ .

Найважливіше завдання теорії похибок - знаходження інтервалу значень фізичної величини, в середині якого з деякою ймовірністю (яку називають довірчою ймовірністю) знаходиться величина

$$(\langle X \rangle - \Delta X) \text{ } X_{ict} \text{ } (\langle X \rangle + \Delta X) \quad (\text{Д А.3})$$

Цей інтервал значень величини  $X$  називають довірчим інтервалом. Якщо, наприклад, ми гарантуємо, що вимірюючи один раз величину  $X$  за даною методикою, отримаємо результат, який лежить в межах даного інтервалу

(Д А.3) з гарантією 95 % , то довірна ймовірність  $P_{\text{дов}}$  буде дорівнювати  $P_{\text{дов}} = 0,95$ .

Для обґрунтування методу обчислення похибок, треба встановити закон, якому підпорядковуються випадкові відхилення величини, яка вимірюється. Ми тільки вкажемо основну ідею, яка полягає в припущенні (що є виправданим): невеликі відхилення  $\Delta X$  від  $X_{\text{ісм}}$  є більш ймовірними ніж великі. На цій ідеї базується нормальний закон розподілу – закон Гауса. Але цей закон справедливий для великого числа вимірювань  $N$ .

В інженерній практиці базуються на розподілі Ст'юдента. Для кожної довірчої ймовірності  $P$  можна обчислити таке число  $t_{NP}$  (коефіцієнт Ст'юдента) для якого випадкова величина  $X$ , що підпорядковується розподілу Ст'юдента, буде знаходитися в межах

$$\langle X \rangle - t_{NP} \delta \langle X_{\text{ісм}} \rangle \leq \langle X \rangle + t_{NP} \delta, \quad (\text{Д А.4})$$

де величина  $\delta$  – середньоквадратичне відхилення результату вимірювань,

$$\delta = \sqrt{\left( (X_1 - \langle X \rangle)^2 + (X_2 - \langle X \rangle)^2 + \dots + (X_n - \langle X \rangle)^2 \right) / N(N-1)} \times \sqrt{\sum (X_i - \langle X \rangle)^2 / (N(N-1))} \quad (\text{Д А.5})$$

де  $N$  – число вимірювань;

$$t_{NP} \delta = \Delta X.$$

Коефіцієнт Ст'юдента для різного числа вимірювань приведено в таблиці

Таблиця Д. А.1 – Коефіцієнти Ст'юдента

N	2	3	4	5	10	100
$t_{NP}$	12.7	4.3	3.2	2.8	2.0	2.0

### Д.А.3 Розрахунок випадкових похибок для непрямих вимірювань

При непрямих вимірюваннях значення фізичної величини  $F$  визначається за формулою:

$$F = F(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (\text{Д А.6})$$

де  $X_1, X_2, \dots, X_n$  фізичні величини, які вимірюються прямо.

Абсолютна похибка  $\Delta F$  непрямих вимірювань визначається за формулою:

$$\Delta F = \sqrt{\left( (\delta F / \delta X_1) \Delta X_1 \right)^2 + \left( (\delta F / \delta X_2) \Delta X_2 \right)^2 + \dots + \left( (\delta F / \delta X_N) \Delta X_N \right)^2}, \quad (\text{Д А.7})$$



де  $\delta F / \delta X_i$  – частинна похідна функції  $F$  за змінною  $X_i$  (при її обчисленні інші змінні  $X_j$ , ( $j = i, j = 1 - N$ ) вважаються сталими величинами);  $\Delta X_i$  абсолютна похибка вимірювання величини  $X_i$ .

Результат непрямого вимірювання (остаточний результат у звіті) подається у вигляді

$$F = \langle F \rangle \pm \Delta F, \quad (\text{Д А.8})$$

де  $F = (\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle)$  – значення функції  $F$  від середніх значень змінних.

Приклад. Обчислення випадкової похибки при розрахунку густини  $\rho$  твердого тіла циліндричної форми.

$$\rho = 4m / \pi d^2 h = (4m / \pi) d^{-2} h^{-1},$$

де  $m$  – маса тіла;  $d$  – діаметр циліндра;  $h$  – висота циліндра.

В даному випадку  $\rho = \rho(m, d, h)$ . Згідно з (Д А.7)

$$\Delta F = \sqrt{((\delta \rho / \delta m) \Delta m)^2 + ((\delta \rho / \delta d) \Delta d)^2 + ((\delta \rho / \delta h) \Delta h)^2},$$

де  $\delta \rho / \delta m = (\delta / \delta m) ((4m / \pi) d^{-2} h^{-1}) = (4 / \pi) d^{-2} h^{-1}$ ;

$$\delta \rho / \delta d = 2(4m / \pi) d^{-3} h^{-1};$$

$$\delta \rho / \delta h = (-4 / \pi) m d^{-2} h^{-2}.$$

#### Д.А.4. Правила заокруглювання результатів обчислень

1. В результаті обчислень абсолютної похибки вимірювань фізичної величини треба залишати лише першу значущу цифру.

2. В середньому значенні величини остання значуща цифра повинна бути одного й того ж порядку, що й перша значуща цифра похибки.

Приклад. При обчисленні прискорення земного тяжіння  $g$  були отримані результати:  $\langle g \rangle = 9,767 \text{ м/с}^2$ ;  $\Delta g = 0.2364 \dots \text{ м/с}^2$ .

Відповідно до формули (Д А.9) та правил (1,2)

$$\langle g \rangle = (9.7 \pm 0.2) \text{ м/с}^2.$$

## ДОДАТОК Б

### Модифікований алгоритм Ейлера

Нехай  $\vec{r}(t)$ ,  $\vec{V}(t)$ ,  $\vec{a}(t)$  – радіус-вектор, вектор швидкості та вектор прискорення в момент часу  $t_a$ .  $\vec{F}(t)$  – рівнодіюча сила, яка діє на матеріальну точку. Тоді рух матеріальної точки маси  $m$  можна описати за допомогою рівняння динаміки

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}(x, y, z, t), \quad (\text{Д Б.1})$$

Згідно з (Д Б.1) рух точки для моментів часу  $t > t_0$  визначено однозначно, якщо відомий початковий стан точки в момент часу  $t_0$  (початкове положення  $\vec{r}(t_0)$  та початкова швидкість  $\vec{V}(t_0)$ ). Розглянемо наближені кінематичні формули:

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x + V_x(t)\Delta t; \\ y(t + \Delta t) &= y + V_y(t)\Delta t; \\ z(t + \Delta t) &= z + V_z(t)\Delta t; \\ V_x(t + \Delta t) &= V_x(t) + a_x(t)\Delta t; \\ V_y(t + \Delta t) &= V_y(t) + a_y(t)\Delta t; \\ V_z(t + \Delta t) &= V_z(t) + a_z(t)\Delta t. \end{aligned} \quad (\text{Д Б.2})$$

З формул (Д Б.2) виходить, що положення та швидкість точки в момент часу  $(t + \Delta t)$  можна обчислити, якщо відомі її положення, швидкість та прискорення в момент  $t$ , завданням початкового стану в момент  $t$ , а прискорення  $a(t)$  — з динамічного рівняння Ньютона (Д Б.1)

$$\begin{aligned} a_x(t) &= \frac{F_x(x, y, z, t)}{m}; \\ a_y(t) &= \frac{F_y(x, y, z, t)}{m}; \\ a_z(t) &= \frac{F_z(x, y, z, t)}{m}. \end{aligned} \quad (\text{Д Б.3})$$

Таким чином, послідовно застосовуючи (Д Б.2) та (Д Б.3), можна визначити положення точки в будь-який момент часу.

Оскільки схема Ейлера має похибку обчислень  $\sim \Delta t$ , то для її зменшення застосовується модифікований метод Ейлера — коефіцієнти виразів (Д Б.2) (тобто значення швидкості та прискорення підставляються в момент часу, який відповідає середині інтервалу  $\Delta t$ , тобто в момент  $t + \frac{\Delta t}{2}$ ). При цьому похибка розрахунків за формулами (Д Б.2), (Д Б.3) має порядок  $\Delta t^2$ . Така видозмінена схема називається модифікованим методом Ейлера.

*Виробничо-практичне видання*

Методичні рекомендації  
до проведення комп'ютерних лабораторних робіт  
з навчальної дисципліни

**«ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА», «ФІЗИКА»**

**РОЗДІЛ**

**«ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ»**

*(для студентів I курсу денної і заочної форм навчання  
освітнього рівня «бакалавр» за всіма спеціальностями)*

Укладачі : **ПЕТЧЕНКО** Олександр Матвійович,  
**БЕЗУГЛИЙ** Анатолій Васильович

Відповідальний за випуск *Є. І. Назаренко*

Редактор *О. В. Михаленко*

Комп'ютерний набір *І. М. Добробаба*

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2019, поз. 193 М.

---

---

Підп. до друку 29.11.2019. Формат 60 × 84/16.  
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 2,5.  
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:  
Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.  
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК № 5328 від 11.04.2017.